図形と方程式　NO1

２点間の距離

２点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 間の距離は　$AB = \boxed{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$

特に、原点 O と点 $A(x_1, y_1)$ との距離は　$OA = \boxed{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}$

内分点，外分点の座標

数直線上の２点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ に対して

1．線分 AB を m : n に内分する点の座標は　$\boxed{\left(\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n}, \dfrac{ny_1+my_2}{m+n}\right)}$

特に、線分 AB の中点の座標は　$\boxed{\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)}$

2．線分 AB を m : n に外分する点の座標は　$\boxed{\left(\dfrac{-nx_1+mx_2}{m-n}, \dfrac{-ny_1+my_2}{m-n}\right)}$ ← m:−n または −m:n に内分と考える。

三角形の重心

点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ を頂点とする三角形 ABC の重心 G の座標は　$\boxed{\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)}$

1. 次の２点間の距離を求めよ。

(1) $A(4,3), B(0,0)$

$\sqrt{4^2+3^2} = \underline{5}$

(2) $A(-2,3), B(4,0)$

$\sqrt{(4+2)^2+(0-3)^2} = \sqrt{45} = \underline{3\sqrt{5}}$

2. ２点 $A(1,4), B(5,-2)$ 結ぶ線分 AB に対して, 次の点の座標を求めよ。

(1) 線分 AB の 中点

$\left(\dfrac{1+5}{2}, \dfrac{4-2}{2}\right)$　　答 $\underline{(3,1)}$

(2) 線分 AB を 2 : 3 の比に内分, 外分する点

内分する点

$\overset{2}{A(1,4)} \quad \overset{3}{B(5,-2)}$

$\left(\dfrac{3\times1+2\times5}{2+3}, \dfrac{3\times4+2\times(-2)}{2+3}\right)$

答 $\underline{\left(\dfrac{13}{5}, \dfrac{8}{5}\right)}$

外分する点

$\overset{-2}{A(1,4)} \quad \overset{3}{B(5,-2)}$

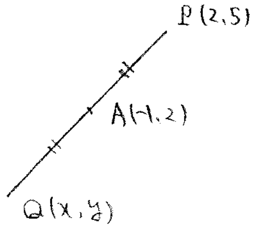
$\left(\dfrac{3\times1+(-2)\times5}{-2+3}, \dfrac{3\times4+(-2)\times(-2)}{-2+3}\right)$

答 $\underline{(-7,16)}$

3. ３点 $A(4,7), B(2,1), C(-3,-2)$ を頂点とする△ABC の重心の座標を求めよ。

$\left(\dfrac{4+2+(-3)}{3}, \dfrac{7+1+(-2)}{3}\right)$　　答 $\underline{(1,2)}$

4. 点 $A(-1,2)$ に関して, 点 $P(2,5)$ と対象な点 Q の座標を求めよ。



Q(x,y) とすると点A は 線分 PQ の中点なので

$-1 = \dfrac{x+2}{2}$　　$2 = \dfrac{y+5}{2}$

$x = -4$, $y = -1$

答 $\underline{(-4,-1)}$

図形と方程式　NO2

(1) 点 (x_1, y_1) を通り、傾きが m の直線の方程式は $\boxed{y-y_1=m(x-x_1)}$

(2) 異なる 2 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ を通る直線の方程式は

$x_1 \neq x_2$ のとき、$\boxed{y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)}$　　$x_1 = x_2$ のとき、$\boxed{x=x_1}$

(3) 2 直線 $y=m_1x+n_1, y=m_2x+n_2$ について、

2 直線が平行 $\Longleftrightarrow$ $\boxed{m_1=m_2}$　2 直線が垂直 $\Longleftrightarrow$ $\boxed{m_1m_2=-1}$

1. 次の条件を満たす直線の方程式を求めよ。

(1) 点 $(-2, 4)$ を通り，傾きが -3

$y-4=-3(x+2)$

$\underline{3x+y+2=0}$ …答

(2) 2 点 $(-4, 3), (6, -3)$ を通る

$y-3=\dfrac{-3-3}{6+4}(x+4)$

$y-3=-\dfrac{3}{5}(x+4)$

$3x+5y-3=0$

(3) 2 点 $(-3, 4), (-3, -1)$ を通る

$\underline{x=-3}$ …答

(4) 2 点 $(-3, 5), (2, 5)$ を通る

$\underline{y=5}$ …答

2. 2 点 $A(-5, -2), B(7, 4)$ がある。点 $P(-2, 5)$ を通り，直線 AB に平行な直線と垂直な直線の方程式を求めよ。

直線ABの傾きは　$\dfrac{4+2}{7+5}=\dfrac{1}{2}$

平行な直線は

$y-5=\dfrac{1}{2}(x+2)$

$\underline{x-2y-12=0}$ …答

垂直な直線は

$y-5=-2(x+2)$

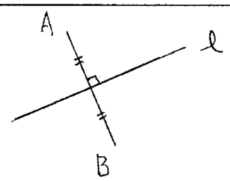
$\underline{2x+y-1=0}$ …答

図形と方程式　NO3

1．2点 A, B が直線 ℓ に関して対称なとき

(1) 直線 AB は ℓ に $\boxed{\text{垂直}}$ である。

(2) 線分 AB の $\boxed{\text{中点}}$ は直線 ℓ 上にある。

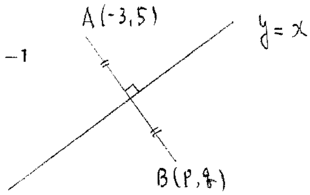


2．点 (x_1, y_1) と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は

$$\boxed{d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

1. 直線 $y=x$ に関して，点 $A(-3,5)$ と対称な点の座標を求めよ。

【解】 直線 $y=x$ を ℓ とし、対称な点の座標を $B(p,q)$ とする



直線 AB の傾きは $\boxed{\dfrac{q-5}{p+3}}$、

直線 AB は ℓ に垂直であるから $\boxed{1\cdot\dfrac{q-5}{p+3}=-1}$ ⇐ 傾きの積が -1

ゆえに、$\boxed{p+q=2}$ … ①

また、線分 AB の中点 $\boxed{\left(\dfrac{p-3}{2},\ \dfrac{q+5}{2}\right)}$ は

直線 ℓ 上にあるから $\boxed{\dfrac{q+5}{2}=\dfrac{p-3}{2}}$ ⇐ 代入すると成り立つ

ゆえに、$\boxed{p-q=8}$ … ②

方程式①，②を連立させて解くと、$p=\boxed{5}$，$q=\boxed{3}$

したがって、点 B の座標は　(5 , 3)

2. 直線 $3x-2y+12=0$ に関して，点 $A(-3,5)$ と対称な点の座標を求めよ。

直線 $3x-2y+12=0$ を ℓ とし，対称な点の座標を $B(p,q)$ とする。

直線 AB の傾きは $\dfrac{q-5}{p+3}$

直線 AB は ℓ に垂直であるから

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{q-5}{p+3}=-1$$

$$\therefore\ 2p+3q=9 \cdots ①$$

直線 AB の中点 $\left(\dfrac{-3+p}{2},\ \dfrac{5+q}{2}\right)$ は直線 ℓ 上にあるから

$$3\cdot\frac{-3+p}{2}-2\cdot\frac{5+q}{2}+12=0$$

$$\therefore\ 3p-2q=-5 \cdots ②$$

①，②より　$p=\dfrac{3}{13}$　$q=\dfrac{37}{13}$

答 $\left(\dfrac{3}{13}, \dfrac{37}{13}\right)$

図形と方程式　NO4

1. ４点 A$(-2,5)$, B$(1,2)$, C$(4,3)$, D を頂点とする平行四辺形 ABCD について，次の点の座標を求めよ。

(1) 対角線 AC の中点

$\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{5+3}{2}\right)$

答 $(1, 4)$

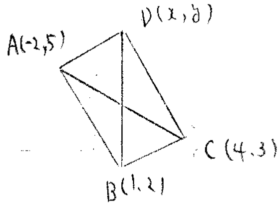
(2) 頂点 D

D(x, y) とすると

$\frac{x+1}{2}=1 \quad \frac{y+2}{2}=2$

$x=1,\ y=2$

答 D$(1, 2)$



2. ３点 $(2,5)$, $(4,9)$, $(-1, a)$ が同じ直線上にあるとき，a の値を求めよ。

２点 $(2,5)$, $(4,9)$ を通る直線の方程式は

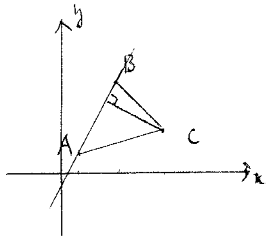
$y-5=\frac{9-5}{4-2}(x-2)$

$y-5=2(x-2)$

$\therefore\ 2x-y+1=0$

点 $(-1, a)$ はこの直線上にあるので

$-2-a+1=0 \quad \therefore\ a=-1$ … 答



3. ３点 A$(1,1)$, B$(3,7)$, C$(5,4)$ について，次のものを求めよ。

(1) 直線 AB の方程式

(2) 線分 AB の長さ

(3) 点 C と直線 AB の距離

(4) $\triangle$ ABC の面積

(1) $y-1=\frac{7-1}{3-1}(x-1)$

$y-1=3(x-1)$

$3x-y-2=0$ … 答

(2)

$AB=\sqrt{(3-1)^2+(7-1)^2}$

$=\sqrt{40}$

$=2\sqrt{10}$ … 答

(3) $\frac{|3\cdot5-4-2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{9}{\sqrt{10}}$

$=\frac{9\sqrt{10}}{10}$ … 答

(4) $\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{10}\cdot\frac{9}{\sqrt{10}}=9$ … 答

図形と方程式　NO5

中心が (a, b), 半径が r の円の方程式は $\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=r^2}$

特に, 中心が原点, 半径 r の円の方程式は $\boxed{x^2+y^2=r^2}$

円の方程式は ℓ, m, n を定数として

$\boxed{x^2+y^2+\ell x+my+n=0}$ と書ける。

1. 次の円の方程式を求めよ。

(1) 原点中心, 半径２の円

$x^2+y^2=4$

(2) 中心 $(2, -5)$, 半径３の円

$(x-2)^2+(y+5)^2=9$

(3) 点 $(2, 4)$ が中心で, 原点を通る円

半径を r とすると

$(x-2)^2+(y-4)^2=r^2$

原点を通るので代入して

$(0-2)^2+(0-4)^2=r^2$ ∴ $r^2=20$

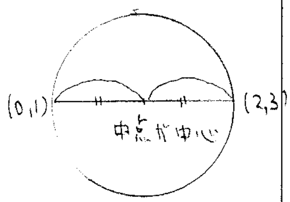
答 $(x-2)^2+(y-4)^2=20$

(4) ２点 $(0, 1), (2, 3)$ を直径の両端とする円

中心 $(1, 2)$

半径 $\dfrac{\sqrt{2^2+(3-1)^2}}{2}=\sqrt{2}$

答 $(x-1)^2+(y-2)^2=2$



2. 次の方程式はどのような図形を表すか。

(1) $x^2+y^2-4x+6y-3=0$

$(x-2)^2+(y+3)^2=16$

中心 $(2, -3)$ 半径４の円

(2) $x^2+y^2+2x-4y+5=0$

$(x+1)^2+(y-2)^2=0$

点 $(-1, 2)$

(3) $x^2+y^2-6x-4y+18=0$

$(x-3)^2+(y-2)^2=-5$

表す図形はない

3. ３点 $(-3, 4), (4, -5), (1, -4)$ を通る円の方程式を求めよ。

求める円の方程式を

$x^2+y^2+\ell x+my+n=0$ とおくと

$9+16-3\ell+4m+n=0$

$16+25+4\ell-5m+n=0$

$1+16+\ell-4m+n=0$

整理して
$3\ell-4m-n=25$ …①
$4\ell-5m+n=-41$ …②
$\ell-4m+n=-17$ …③

①+②より $7\ell-9m=-16$ …④

①+③より $4\ell-8m=8$ より $\ell-2m=2$ …⑤

④,⑤より $\ell=-10$, $m=-6$ ③に代入して $n=-31$

答 $x^2+y^2-10x-6y-31=0$

図形と方程式　NO6

円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $P(x_1, y_1)$ におけるこの円の接線の方程式は

$\boxed{x_1x+y_1y=r^2}$

問 次の円の与えられた点における接線の方程式を求めよ。

(1) $x^2+y^2=25$　$(3,4)$

$3x+4y=25$

(2) $x^2+y^2=5$　$(-1,2)$

$-x+2y=5$

(3) $x^2+y^2=4$　$(2,0)$

$2x=4$　$\therefore$ $x=2$

(4) $x^2+y^2=9$　$(\sqrt{3},\sqrt{6})$

$\sqrt{3}x+\sqrt{6}y=9$

点 $P(-3,1)$ を通り，円 $x^2+y^2=1$ に接する直線の方程式と，接点の座標を求めよ。

【解】接点を $Q(x_1, y_1)$ とすると，

$\boxed{x_1^2+y_1^2=1}$ … ①　⇐ 点Qは円 $x^2+y^2=1$ 上にある。

また，点Qにおけるこの円の接線の方程式は

$\boxed{x_1x+y_1y=1}$ … ②

この直線が点Pを通るから

$\boxed{-3x_1+y_1=1}$ … ③

①，③から y_1 を消去すると　⇐

$y_1=3x_1+1$ を①に代入

$x_1^2+(3x_1+1)^2=1$

$10x_1^2+6x_1=0$

$x_1(5x_1+3)=0$

$\boxed{x_1(5x_1+3)=0}$　ゆえに $x_1=\boxed{0}, \boxed{-\frac{3}{5}}$

③から，$x_1=\boxed{0}$ のとき，$y_1=\boxed{1}$，

$x_1=\boxed{-\frac{3}{5}}$ のとき，$y_1=\boxed{-\frac{4}{5}}$

よって，接線の方程式②は，

$\boxed{y=1,\quad 3x+4y+5=0}$

接点の座標は

$\boxed{(0,1),\ \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)}$

問　点 $P(-5,10)$ を通り，円 $x^2+y^2=25$ に接する直線の方程式と，接点の座標を求めよ。

接点を $Q(x_1, y_1)$ とすると　$x_1^2+y_1^2=25$ …①

点Qにおけるこの円の接線は　$x_1x+y_1y=25$ …②

この直線が点Pを通るから　$-5x_1+10y_1=25$

ゆえに　$x_1=2y_1-5$ …③

③を①に代入して

$(2y_1-5)^2+y_1^2=25$

$5y_1^2-20y_1=0$

$y_1(y_1-4)=0$　$\therefore$ $y_1=0, 4$

③より　$y_1=0$ のとき $x_1=-5$，$y_1=4$ のとき $x_1=3$

接線の方程式は $x=-5,\ 3x+4y=25$

接点の座標は $(-5,0),\ (3,4)$

図形と方程式　NO7

円 $x^2+y^2=r^2$ と直線 $sx+ty+u=0$ について，連立方程式

$$\begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ sx+ty+u=0 \end{cases}$$

から y を消去して２次方程式を $ax^2+bx+c=0$ とし、判別式を $D=b^2-4ac$ とすると

$\boxed{D>0}$ $\Longleftrightarrow$ 異なる２点で交わる。

$\boxed{D=0}$ $\Longleftrightarrow$ 接する

$\boxed{D<0}$ $\Longleftrightarrow$ 共有点を持たない。

半径 r の円の中心と直線 ℓ の距離を d とすると

$\boxed{d<r}$ $\Longleftrightarrow$ 異なる２点で交わる。

$\boxed{d=r}$ $\Longleftrightarrow$ 接する

$\boxed{d>r}$ $\Longleftrightarrow$ 共有点を持たない。

1. 円 $x^2+y^2=1$ と直線 $y=2x+k$ が共有点を持つとき，定数 k の値の範囲を求めよ。
また，接するときの k の値と接点の座標を求めよ。

$x^2+y^2=1$ …①

$y=2x+k$ …②

②を①に代入して　$x^2+(2x+k)^2=1$

$5x^2+4kx+k^2-1=0$ …③

判別式をDとすると

$\frac{D}{4}=4k^2-5(k^2-1)=-k^2+5\geqq 0$

$k^2-5\leqq 0$　$(k+\sqrt{5})(k-\sqrt{5})\leqq 0$

$\therefore$ $-\sqrt{5}\leqq k\leqq\sqrt{5}$

接するときは $k=\pm\sqrt{5}$

$k=\sqrt{5}$ のとき ③は $5x^2+4\sqrt{5}x+4=0$

$(\sqrt{5}x+2)^2=0$　$x=-\frac{2}{\sqrt{5}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$y=2\cdot\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)+\sqrt{5}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

$k=-\sqrt{5}$ のとき同様にして

$x=\frac{2\sqrt{5}}{5}$　$y=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

答　$k=\sqrt{5}$ のとき $\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$

$k=-\sqrt{5}$ のとき $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$

[別解]

円の中心（原点）と $y=2x+k$ の距離は

$\frac{|k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{5}}$

共有点を持つとき　$\frac{|k|}{\sqrt{5}}\leqq 1$

$|k|\leqq\sqrt{5}$　$\therefore$ $-\sqrt{5}\leqq k\leqq\sqrt{5}$ …答

接するとき　$\frac{|k|}{\sqrt{5}}=1$　$|k|=\sqrt{5}$

$\therefore$ $k=\pm\sqrt{5}$ …答

接点の座標は $y=2x+k$ と原点を通り，これに垂直な直線 $y=-\frac{1}{2}x$ の交点の座標であるから

答　$k=\sqrt{5}$ のとき $\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$

$k=-\sqrt{5}$ のとき $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$

図形と方程式　NO8

2つの円　$x^2+y^2+\ell_1x+m_1y+n_1=0$

$x^2+y^2+\ell_2x+m_2y+n_2=0$

が異なる２点で交わるとき，２円の交点を通る円 (直線) は，k を定数として

$k(x^2+y^2+\ell_1x+m_1y+n_1)+(x^2+y^2+\ell_2x+m_2y+n_2)=0$

で表される。

$k\neq-1$ のとき，２つの交点を通る円

$k=-1$ のとき，２つの交点を通る直線

1. 交わる２つの円 $x^2+y^2-2x-4y+1=0$　$x^2+y^2=5$ について，２円の交点，および点 (1,3) を通る円の方程式を求めよ。

求める円の方程式を

$x^2+y^2-2x-4y+1+k(x^2+y^2-5)=0$ とおくと

点(1,3)を通るので

$1^2+3^2-2\cdot1-4\cdot3+1+k(1^2+3^2-5)=0$

$5k-3=0$　$\therefore k=\frac{3}{5}$

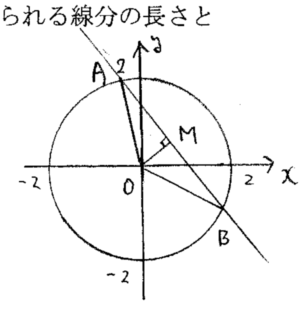
$x^2+y^2-2x-4y+1+\frac{3}{5}(x^2+y^2-5)=0$

$5x^2+5y^2-10x-20y+5+3x^2+3y^2-15=0$

$8x^2+8y^2-10x-20y-10=0$

$\therefore 4x^2+4y^2-5x-10y-5=0$

2. 直線 $4x+3y-5=0$ が円 $x^2+y^2=4$ から切り取られる線分の長さと線分の中点の座標を求めよ。



円の中心をO, 切り取られる線分をAB

ABの中点をMとする。

$OM=\dfrac{|-5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=1$

$OM^2+AM^2=OA^2$

$AM^2=OA^2-OM^2=4-1=3$

$\therefore AM=\sqrt{3}$　$AB=2AM=\underline{2\sqrt{3}}$ …答

原点を通り $4x+3y-5=0$ …① と垂直な直線 $y=\frac{3}{4}x$ …②

との交点が線分ABの中点であるから

①,②を解いて　$x=\frac{4}{5}$　$y=\frac{3}{5}$

答 $\underline{\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)}$

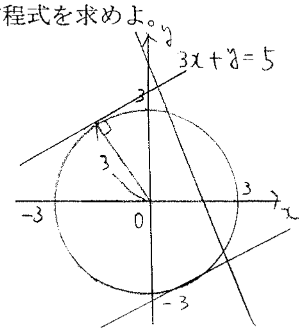
図形と方程式　NO9

1. 円 $x^2+y^2=9$ の接線で，直線 $3x+y=5$ に垂直なものの方程式を求めよ。

求める接線を $x-3y+c=0$ とおくと
原点と直線 $x-3y+c=0$ の距離が
半径3に等しいので

$$\frac{|c|}{\sqrt{1+(-3)^2}}=3 \quad |c|=3\sqrt{10} \quad \therefore c=\pm 3\sqrt{10}$$

答 $x-3y+3\sqrt{10}=0$, $x-3y-3\sqrt{10}=0$



2. 中心が点 $(3,0)$ で，$4x-3y-2=0$ に接する円の方程式を求めよ。

点 $(3,0)$ と $4x-3y-2=0$ との距離が
半径に等しいので

$$\frac{|4\cdot 3-3\cdot 0-2|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{10}{5}=2$$

答 $(x-3)^2+y^2=2^2$

3. 中心が直線 $y=x+1$ 上にあり，x 軸に接して，点 $(3,2)$ を通る円の方程式を求めよ。

中心を $(a, a+1)$ とすると半径は $|a+1|$
であるから，求める円の方程式は

$(x-a)^2+\{y-(a+1)\}^2=(a+1)^2$ …①

点 $(3,2)$ を通るので

$(3-a)^2+\{2-(a+1)\}^2=(a+1)^2$

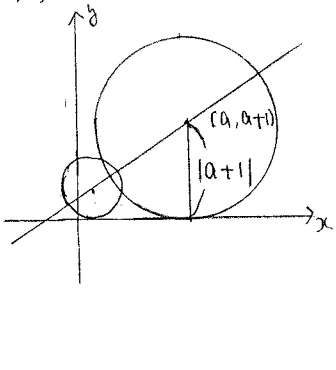
$a^2-10a+9=0$

$(a-1)(a-9)=0$

$a=1, 9$

①に代入して

答 $(x-1)^2+(y-2)^2=2^2$, $(x-9)^2+(y-10)^2=10^2$



公式 NO1 図形と方程式

1. 数直線上の２点 A(a), B(b) に対して、線分 AB を m:n に内分する点を P、外分する点を Q とする。

　点 P の座標は　$x = \boxed{\dfrac{na+mb}{m+n}}$　点 Q の座標は　$x = \boxed{\dfrac{-na+mb}{m-n}}$

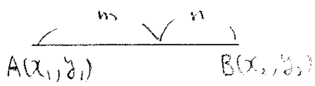
　特に、線分 AB の中点の座標は　$x = \boxed{\dfrac{a+b}{2}}$

2. ２点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 間の距離は　$AB = \boxed{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$

　特に、原点 O と点 $A(x_1, y_1)$ との距離は　$OA = \boxed{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}$

3. 内分点，外分点の座標
　数直線上の２点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ に対して

　1．線分 AB を m : n に内分する点の座標は　$\boxed{\left(\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n}, \dfrac{ny_1+my_2}{m+n}\right)}$



　特に、線分 AB の中点の座標は　$\boxed{\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)}$

　2．線分 AB を m : n に外分する点の座標は　$\boxed{\left(\dfrac{-nx_1+mx_2}{m-n}, \dfrac{-ny_1+my_2}{m-n}\right)}$

4. 三角形の重心

　点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ を頂点とする三角形 ABC の重心 G の座標は　$\boxed{\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)}$

5. (1) 点 (x_1, y_1) を通り、傾きが m の直線の方程式は　$\boxed{y-y_1=m(x-x_1)}$

6. 異なる２点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ を通る直線の方程式は

　$x_1 \neq x_2$ のとき、$\boxed{y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)}$　　$x_1 = x_2$ のとき、$\boxed{x=x_1}$

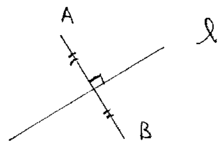
7. ２直線 $y = m_1x + n_1, y = m_2x + n_2$ について、

　２直線が平行 $\Longleftrightarrow$ $\boxed{m_1=m_2}$　２直線が垂直 $\Longleftrightarrow$ $\boxed{m_1m_2=-1}$

8. ２点 A, B が直線 ℓ に関して対称なとき

　(1) 直線 AB は ℓ に $\boxed{垂直}$ である。

　(2) 線分 AB の $\boxed{中点}$ は直線 ℓ 上にある。



9. 点 (x_1, y_1) と直線 $ax + by + c = 0$ の距離 d は

$$d = \boxed{\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

10. ２直線 $ax + by + c = 0, dx + ey + f = 0$ について、

　２直線が平行 $\Longleftrightarrow$ $\boxed{ae-bd=0}$　　a b / d e

　２直線が垂直 $\Longleftrightarrow$ $\boxed{ad+be=0}$　　a b / d e

公式 NO2 図形と方程式

11. 中心が (a,b), 半径が r の円の方程式は $\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=r^2}$

特に, 中心が原点, 半径 r の円の方程式は $\boxed{x^2+y^2=r^2}$

12. 円の方程式は ℓ, m, n を定数として

$\boxed{x^2+y^2+\ell x+my+n=0}$ と書ける。

13. 円 $x^2+y^2=r^2$ と直線 $sx+ty+u=0$ について, 連立方程式

$$\begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ sx+ty+u=0 \end{cases}$$

から y を消去して２次方程式を $ax^2+bx+c=0$ とし、判別式を $D=b^2-4ac$ とすると

$\boxed{D>0}$ $\Longleftrightarrow$ 異なる２点で交わる。

$\boxed{D=0}$ $\Longleftrightarrow$ 接する

$\boxed{D<0}$ $\Longleftrightarrow$ 共有点を持たない。

$\boxed{D\geqq 0}$ $\Longleftrightarrow$ 共有点を持つ。

半径 r の円の中心と直線 ℓ の距離を d とすると

$\boxed{d<r}$ $\Longleftrightarrow$ 異なる２点で交わる。

$\boxed{d=r}$ $\Longleftrightarrow$ 接する

$\boxed{d>r}$ $\Longleftrightarrow$ 共有点を持たない。

$\boxed{d\leqq r}$ $\Longleftrightarrow$ 共有点を持つ。

14. 円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $P(x_1,y_1)$ におけるこの円の接線の方程式は

$\boxed{x_1x+y_1y=r^2}$

15. ２つの円 $x^2+y^2+\ell_1x+m_1y+n_1=0$

$x^2+y^2+\ell_2x+m_2y+n_2=0$

が異なる２点で交わるとき，２円の交点を通る円 (直線) は，k を定数として

$k(x^2+y^2+\ell_1x+m_1y+n_1)+(x^2+y^2+\ell_2x+m_2y+n_2)=0$

で表される。

$k\neq-1$ のとき，２つの交点を通る円

$k=-1$ のとき，２つの交点を通る直線

16. 次の問題を解くときに最初におく式をかけ。

(1) 円 $x^2+y^2=9$ の接線で，直線 $2x-3y=5$ に垂直なものの方程式を求めよ。

$\Longleftrightarrow$ $\boxed{\text{求める接線を } 3x+2y+c=0 \text{ とおく}}$ $\Leftarrow$ 中心原点と直線の距離が3

(1′) 円 $x^2+y^2=9$ の接線で，直線 $3x+2y=1$ に平行なものの方程式を求めよ。

$\Longleftrightarrow$ $\boxed{\text{求める接線を } 2x-3y+c=0 \text{ とおく}}$ $\Leftarrow$ 中心原点と直線の距離が3

(2) 中心が点 $(3,0)$ で，$4x-3y-2=0$ に接する円の方程式を求めよ。

半径 $r=\boxed{2}$ $\quad \dfrac{|12-2|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=2$ $\Leftarrow$ 中心 $(3,0)$ 半径2の円

(3) 中心が直線 $y=x+1$ 上にあり，x 軸に接して，点 $(3,2)$ を通る円の方程式を求めよ。

$\Longleftrightarrow$ $\boxed{(x-a)^2+\{y-(a+1)\}^2=(a+1)^2 \text{ とおく}}$ $\Leftarrow$ 点 $(3,2)$ を代入

(4) 点 $(1,2)$ を通り，x 軸と y 軸の両方に接する円

$\Longleftrightarrow$ $\boxed{(x-r)^2+(y-r)^2=r^2\ (r>0) \text{ とおく}}$ $\Leftarrow$ 点 $(1,2)$ を代入

(5) 中心が直線 $y=2x$ 上にあり，原点と点 $(2,4)$ を通る円

$\Longleftrightarrow$ $\boxed{(x-a)^2+(y-2a)^2=r^2 \text{ とおく}}$ $\Leftarrow$ 原点 $(0,0)$ と点 $(2,4)$ を代入

(6) ２点 $(-5,1)$，$(2,8)$ を通り，x 軸に接する円

$\Longleftrightarrow$ $\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=b^2 \text{ とおく}}$ $\Leftarrow$ 2点 $(-5,1)$, $(2,8)$ を代入